

---

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

C. PARENTI

SISTEMI IPERBOLICI E RELAZIONI DI POISSON

30 APRILE 1987

## 1. INTRODUZIONE

La formula di Poisson classica:

$$(1.1) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ikt} = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - 2\pi k)$$

può essere interpretata come una relazione tra lo spettro  $\{k^2 | k=0,1,\dots\}$  del laplaciano  $-d^2/dx^2$  sul toro  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  e le lunghezze  $2k\pi$  ( $k=0,1,\dots$ ) delle geodetiche periodiche del toro stesso.

Chazarain [2] e Duistermaat-Guillemin [3] hanno generalizzato la relazione (1.1) al caso di un operatore ellittico autoaggiunto e positivo  $a(x,D)$  (d'ordine  $m>0$ ) definito su una varietà  $C^\infty$  compatta e connessa  $M$  ( $\partial M = \emptyset$ ).

Precisamente, detti  $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$  gli autovalori di  $a$  e definita la distribuzione

$$(1.2) \quad S(t) = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} e^{\pm i^m \sqrt{\lambda_k} t},$$

hanno mostrato che  $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Si consideri poi il campo hamiltoniano  $H$  in  $T^*M \setminus 0$  definito dal simbolo principale  $\sigma(a)$  di  $a$  e consideriamo le curve integrali periodiche di  $H$ ; i.e. le  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow T^*M \setminus 0$ ,  $\dot{\gamma} = H_\gamma$  tali che  $\gamma(t+T) = \gamma(t)$ ,  $\forall t$  per un  $T \neq 0$ . Indichiamo con  $\mathcal{L} = \{T \mid T \text{ periodo di una curva integrale periodica di } H\}$ .

E' stato provato in [3] che si ha:

$$(1.3) \quad \text{sing supp}(S) \subset \mathcal{L} \cup \{0\}.$$

Di più se l'insieme delle orbite chiuse di  $H$  ha "buone proprietà geometriche", è possibile provare che si ha

$$(1.4) \quad \sum_{k \geq 0} \pm i^m \sqrt{\lambda_k} t = \sum_{\lambda \in \mathcal{L} \cup \{0\}} v_\lambda \quad (\text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R})).$$

dove  $v_{\lambda}$  sono certe distribuzioni a supporto vicino ad  $\lambda$  ed aventi in  $\lambda$  una singolarità che può essere descritta.

I risultati sopra descritti possono essere facilmente estesi al caso in cui  $a(x,D)$  sia un sistema  $N \times N$ ,  $a = a^*$ ,  $a > 0$ , nel caso in cui gli autovalori di  $\sigma(a)$  siano distinti.

Qui ci proponiamo di provare una relazione tipo (1.3), sotto opportune ipotesi, qualora gli autovalori di  $\sigma(a)$  non siano tutti distinti.

## 2. ENUNCIATO DEL RISULTATO

Sia  $M$  una varietà  $C^\infty$  compatta con  $\partial M = \emptyset$  e sia  $A(x,D) \in OPS^1(M; N \times N)$  un sistema  $N \times N$  di operatori pseudodifferenziali classici del 1° ordine su  $M$ .

Detta  $dv$  una densità positiva su  $M$ , supponiamo:

$$i) \quad A = A^* \quad \text{in } L^2(M; dv)$$

$$ii) \quad \sigma(A) > 0 \text{ su } T^* \setminus 0, \sigma(A) \text{ essendo il simbolo principale di } A.$$

E' allora ben noto (disuguaglianza di Gårding) che il sistema ellittico  $A$  ha risolvante compatto in  $L^2(M; dv)$  e lo spettro è costituito da una sequenza di autovalori:

$$-\infty < \mu_0 \leq \mu_1 \leq \dots \rightarrow +\infty$$

ripetuti con la loro molteplicità.

Poniamo, formalmente,

$$(2.1) \quad S(t) = \sum_{k \geq 0} e^{+i\mu_k t} = 2\pi \mathcal{F}_{\mu \rightarrow t}^{-1} \left( \sum_{k \geq 0} \delta(\mu - \mu_k) \right).$$

E' noto che  $\{\mu_k\}$  cresce polinomialmente sicché  $S(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  e ci pro-

poniamo di stimare il supporto singolare di  $S$ .

Non sappiamo farlo in generale. Il meglio che ci è riuscito finora è quanto segue.

Supponiamo che  $\sigma(A)(x, \xi)$  sia diagonalizzabile e precisamente che esista  $U(x, \xi) \in S^0(M; N \times N)$  (omogenea di grado 0 in  $\xi$ ) tale che:

- 1)  $t_{U(x, \xi)} = U(x, \xi)^{-1}$
- 2)  $U(x, \xi) \sigma(A)(x, \xi) U(x, \xi)^{-1} = \Lambda(x, \xi)$ , diagonale.
- 3)  $\det(\zeta - \sigma(A)(x, \xi)) = \prod_{j=1}^v (\zeta - \lambda_j(x, \xi))^{k_j}$ ,  $\zeta \in \mathbb{C}$ , per certi interi positivi  $k_1, \dots, k_v$  e certe funzioni reali ( $>0$ )  $\lambda_j \in S^1(T^*M \setminus 0)$ , omogenee di grado 1.

Per ogni  $i, j \in \{1, \dots, v\}$ ,  $i \neq j$ , poniamo  $\Sigma_{i,j} = \{(x, \xi) \in T^*M \setminus 0 \mid \lambda_i(x, \xi) = \lambda_j(x, \xi)\}$ . Faremo l'ipotesi seguente:

3) Se per qualche  $i, j$  si ha  $\Sigma_{i,j} \neq \emptyset$  allora:

$$(i) \quad \{\lambda_i, \lambda_j\} \neq 0 \text{ su } \Sigma_{i,j}$$

$$(ii) \quad \forall \ell \in \{1, \dots, v\}, \ell \neq i, j, \quad \Sigma_{\ell, i} = \Sigma_{\ell, j} = \emptyset.$$

Definiamo ora due tipi di curve in  $T^*M \setminus 0$ .

Sia  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow T^*M \setminus 0$  continua. Diremo che  $\gamma$  è una bicaratteristica di primo tipo se  $\gamma \in C^1(I)$  e per un  $j \in \{1, \dots, v\}$  si ha

$$\frac{d}{dt} \gamma(t) = H_{\lambda_j}(\gamma(t)), \quad t \in I.$$

Diremo che  $\gamma$  è una bicaratteristica di 2° tipo se esiste una coppia  $i, j$  con  $\Sigma_{i,j} \neq \emptyset$  ed una scomposizione finita  $t_0 = a < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ ,  $n \geq 2$ , tale che:

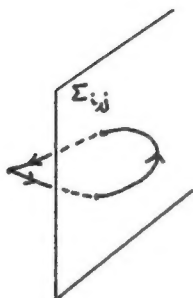
(1)  $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$  è una curva integrale di  $H_{\lambda_i}$  o  $H_{\lambda_j}$ ,  $k=1, \dots, n$

(2)  $\gamma(t_k) \in \Sigma_{i,j}$ ,  $k=1, \dots, n-1$

Si noti che se  $\Sigma_{i,j} \neq \emptyset$  e  $\gamma$  è una curva integrale di  $H_{\lambda_i}$  (o  $H_{\lambda_j}$ ) con  $\gamma(\bar{t}) \in \Sigma_{i,j}$  per un  $\bar{t}$ , allora  $\gamma(t) \notin \Sigma_{i,j}$  per  $t \sim \bar{t}$  come conseguenza del fatto che  $\{\lambda_i, \lambda_j\} \neq 0$  su  $\Sigma_{i,j}$ .



bicaratteristica del 1° tipo



bicaratteristica del 2° tipo

Detto ora  $\mathcal{L}$  l'insieme di periodi delle bicaratteristiche periodiche di 1° o 2° tipo, si ha:

Teorema 1. Nelle ipotesi precedenti risulta

$$\text{sing supp}(S) \subset \mathcal{L} \cup \{0\}.$$

Il Teorema 1 generalizza un risultato di Melrose [4].

La dimostrazione segue l'idea di [2], [3]. Consideriamo il sistema iperbolico:

$$P = I_N D_t - A(x, D) \quad (D_t = \frac{1}{\sqrt{-1}} \partial_t)$$

Tale sistema è iperbolico simmetrizzabile e quindi esiste una soluzione fondamentale  $E(t) \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{D}'(M \times M))$  soddisfacente:

$$(2.1) \quad \begin{cases} -PE = 0 \\ E|_{t=0} = \delta(x-y) \end{cases}$$

Si noti che se  $\phi_k(x) \in C^\infty(M)$ ,  $k=0,1,\dots$  è una base ortonormale in  $L^2(M, \nu)$  di autofunzioni per  $A$ , allora formalmente si ha:

$$(2.2) \quad E(t, x, y) = \sum_{k \geq 0} e^{+i\mu_k t} \phi_k(x) \otimes \phi_k(y)$$

e quindi, sempre formalmente:

$$(2.3) \quad S(t) = \int_M E(t, x, x) d\nu(x)$$

La giustificazione formale di (2.3) è la seguente.

Consideriamo le mappe

$$\Delta : \mathbb{R}_t \times M \rightarrow \mathbb{R}_t \times M \times M$$

$$\Delta(t, x) = (t, x, x)$$

$$\pi : \mathbb{R}_t \times M \rightarrow \mathbb{R}_t$$

$$\pi(t, x) = t$$

Allora (2.3) si può interpretare come

$$(2.3)' \quad S(t) = \pi_*(\Delta^* E)$$

Dove  $\Delta^* : C^\infty(R_t \times M \times M) \rightarrow C^\infty(R_t \times M)$  è il pull-back

$(\Delta^* f)(t, x) = f(t, x, x)$  (restrizione alla diagonale) e

$\pi_* : C^\infty(R_t \times M) \rightarrow C^\infty(R_t)$  è il push-forward  $(\pi_* g)(t) = \int_M g(t, x) dv(x)$ .

Poiché  $E$  è una distribuzione le mappe  $\Delta^*$ ,  $\pi_*$  si possono applicare in certe condizioni.

Ricordiamo che si ha:

$$(2.4) \quad \begin{cases} WF'(\Delta^*) \subset \{((t, x; \tau, \xi + \xi'), (t, x, x; \xi, \xi'))\} \in T^*(R_t \times M) \times (T^*(R_t \times M \times M) \setminus 0) \\ WF'(\pi_*) \subset \{((t, \tau), (t, x; \tau, 0))\} \subset (T^*R_t \setminus 0) \times T^*(R_t \times M) \end{cases}$$

Occorre dunque un'informazione su  $WF'(E)$ ,  $E: \mathcal{D}'(M) \rightarrow C^\infty(R_t; \mathcal{D}'(M))$ . Il punto cruciale è il teorema seguente:

Teorema 2. Si ha:

$$WF'(E) \subset \{(0, y; \tau, \xi), (y, \xi) \mid (y, \xi) \in T^*M \setminus 0, (0, y; \tau, \xi) \in Ch(P)\} \cup$$

$$\{((t, \tilde{y}; \tau, \tilde{\xi}), (y, \xi)) \mid (y, \xi) \in T^*M \setminus 0, (t, \tilde{y}; \tau, \tilde{\xi}) \in Ch(P), t \neq 0, \exists$$

una bicaratteristica di 1° o 2° tipo  $\gamma: [0, |t|] \rightarrow T^*M \setminus 0$ , con

$$\gamma(0) = (y, \xi), \gamma(|t|) = (\tilde{y}, \tilde{\xi})\} = \mathcal{R}_0 \cup \mathcal{R}_1.$$

Dato per buono il Teorema 2, poiché  $\tau \neq 0$  su  $WF'(E)$  allora  $\Delta^* E$  ha senso e quindi  $\pi_*(\Delta^* E)$  perché  $\pi$  è submersiva.

Allora:

$$WF(S(t)) = WF(\pi_* \Delta^* E) \subset$$

$$\subset \{(t, \tau) \mid \exists (y, \eta) \in T^*M \setminus 0 \mid ((t, \tau; y, \eta), (y, \eta)) \in WF'(E)\}$$

e quindi, in conclusione:

$\text{sing supp}(S) \subset \{0\} \cup \{T \in \mathbb{R} \setminus 0 \mid \exists (y, \eta) \in T^*M \setminus 0 \text{ ed una bicaratteristica di } 1^\circ \text{ o } 2^\circ \text{ tipo } \gamma \text{ con } \gamma(0) = \gamma(|T|) = (y, \eta)\}.$

Con ciò il Teorema 1 è provato.

La prova del Teorema 2 è a sua volta conseguenza del risultato cruciale seguente.

Teorema 3. Sia  $u \in \mathcal{D}'(R_t \times M)$  e sia  $\rho_0 = (t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \in T^*(R_t \times M)$  con  $(x_0, \xi_0) \in \Sigma_{i,j}$  (per una coppia  $i, j$ ) e  $\tau_0 = \lambda_i(x_0, \xi_0) = \lambda_j(x_0, \xi_0)$ .

Poniamo  $q_i = \tau - \lambda_i(x, \xi)$ ,  $q_j = \tau - \lambda_j(x, \xi)$  e siano  $\gamma_i(s)$ ,  $\gamma_j(s)$  le bicaratteristiche di  $q_i$ ,  $q_j$  passanti per  $\rho_0$ ; i.e.  $\gamma_i(0) = \gamma_j(0) = \rho_0$ . Sia poi:

$$\gamma_\ell^\pm = \{\gamma_\ell(s) \mid \pm s > 0\}, \quad \ell = i, j.$$

Se su un intorno conico  $\Gamma$  di  $\rho_0$  si ha:

$$1) \quad WF(Pu) \cap \Gamma = \emptyset$$

$$2) \quad \forall \ell \in \{i, j\} \text{ e per una scelta dei segni } +, -, \text{ risulta}$$

$$\gamma_\ell^\pm \cap WF(u) \cap \Gamma = \emptyset$$

Allora  $\rho_0 \notin WF(u)$ .



Vediamo come dal Teorema 3 segue il Teorema 2.

Basta provare che  $\forall g \in \mathcal{D}'(M)$  si ha  $WF(E(t)g) \subset (\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1)$  o  $WF(g)$ .

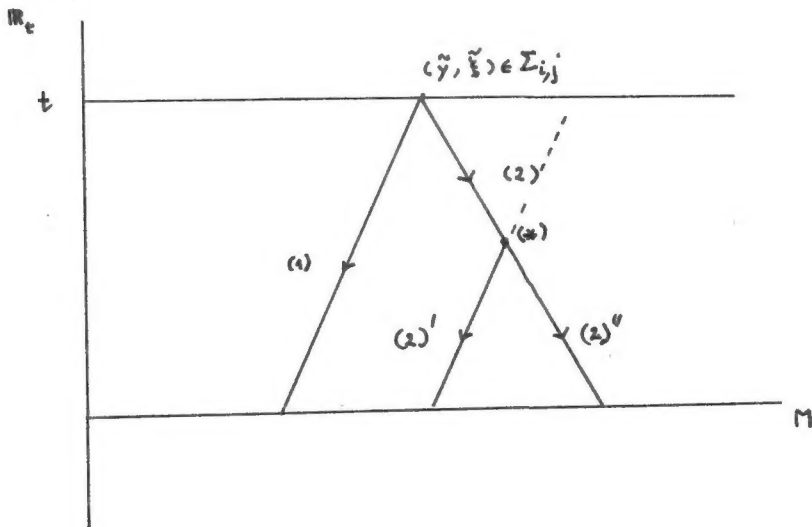
Da un risultato di Ivrii segue che si ha:

$$\{(0, y; \tau, \xi) \mid (y, \xi) \in T^*M \setminus \{0\} \subset WF(E(t)g) \Rightarrow$$

$$(y, \xi) \in WF(g) \text{ e } (0, y; \tau, \xi) \in Ch(P).$$

Rimane allora da provare che se un punto  $(t, \tilde{y}; \tau, \tilde{\xi}) \in Ch(P) \cap WF(Eg)$ , allora tale singolarità proviene da una singolarità di  $g$  lungo una bicaratteristica di 1° o 2° tipo. Ragioniamo per  $t > 0$ . Se  $\tau = \lambda_i(\tilde{y}, \tilde{\xi})$  e  $\Sigma_{i,j} = \emptyset \ \forall j \neq i$ , allora da noti risultati di propagazione tutta la bicaratteristica nulla retrograda di  $\tau - \lambda_i$  è inclusa in  $WF(Eg)$  e quindi  $(\tilde{y}, \tilde{\xi})$  è il punto d'arrivo di una bicaratteristica di 1° tipo che parte da un punto in  $WF(g)$ .

Supponiamo ora che sia  $\tau = \lambda_i(\tilde{y}, \tilde{\xi})$  e  $\Sigma_{i,j} \neq \emptyset$  per un  $j$  (e quindi uno solo). Muoviamoci in modo retrogrado da  $(t, \tilde{y}; \tau, \tilde{\xi})$  mediante curve integrali di  $\tau - \lambda_i$  o  $\tau - \lambda_j$ . Ad es.:



Dal Teorema 3 la singolarità va su (1) o su (2) (almeno fino a (\*)). Se va su (1) siamo O.K.. Poiché  $(*) \in \text{WF}(Eg)$ , dal Teorema 3 segue che la singolarità va su (2)' o su (2)" e quindi la tesi.

La prova del Teorema 3 è troppo lunga per essere riportata qui. Le linee essenziali sono le seguenti.

Supposto per semplicità  $i=1, j=2$ ,  $\lambda_1$  di molteplicità  $h_1$ ,  $\lambda_2$  di molteplicità  $h_2$ , ci si riduce microlocalmente ad un sistema

$$P = \begin{pmatrix} I_{h_1} (D_t - \lambda_1(x, D_x)) & \\ & I_{h_2} (D_t - \lambda_2(x, D_x)) \end{pmatrix} + B(t, x, D_t, D_x)$$

con  $B \in \text{OPS}^0(R_t \times M; (h_1 + h_2) \times (h_1 + h_2))$ .

Usando una trasformazione canonica che mandi  $\tau - \lambda_1(x, \xi)$  in  $\tau$  e tenuto conto che  $\{\lambda_1, \lambda_2\} \neq 0$ , ci si riduce ad un sistema del tipo

$$P = \begin{pmatrix} I_{h_1} D_t & \\ & I_{h_2} (D_t + t\psi(t, y, D_y)) \end{pmatrix} + B(t, y, D_t, D_y)$$

con  $B$  d'ordine 0.

Usando un'astuzia di Petkov [5], mediante un intertwining pseudo-differenziale ci si riduce a

$$P = \begin{pmatrix} I_{h_1} D_t & \\ & I_{h_2} (D_t + t\psi(t, y, D_y)) \end{pmatrix} + \begin{matrix} h_1 & h_2 \\ \begin{pmatrix} 0 & \vdots & L \\ - & \vdots & - \\ M & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$L, M$  d'ordine 0,  $[D_t, M] = [D_t, L] = 0$ .

Il sistema

$$\begin{cases} I_{h_1} D_t u_1 + L u_2 = f_1 \\ I_{h_2} (D_t + t\psi) u_2 + M u_1 = f_2 \end{cases}$$

diventa

$$I_{h_2} D_t (D_t + t\psi) u_2 + M D_t u_1 = D_t f_2$$

e quindi

$$I_{h_2} D_t (D_t + t\psi) u_2 - M L u_2 = D_t f_2 - M f_1$$

Mediante un'altra trasformazione canonica ci si riduce a

$$I_{h_2} (t a_t) - C(t, x, D_t, D_x)) v = g$$

e qui si applicano i risultati di Bove-Lewis-Parenti [1].

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] BOVE-LEWIS-PARENTI, Springer Lecture Notes in Math., 984 (1983).
- [2] CHAZARAIN, Invent. Math., 24 (1974), 65-82.
- [3] DUISTERMANT-GUILLEMIN, Invent. Math. 29 (1975), 39-79.
- [4] MELROSE, Bull. Amer. Math. Soc., 81 (1975), 939-940.
- [5] PETKOV, Seminari Univ. di Bologna (1982).